Analyse Complexe
TD 6
Principe du maximum, fonctions entières

Exercice 1 Soit $f : D \to D$ holomorphe. Montrer que si f a deux points fixes, f est l'identité. Donner un exemple de f sans point fixe.

Exercice 2

1. Soit f et g deux fonctions holomorphes sur D, nulles en 0, telles que $f(D) \subset g(D)$. On suppose de plus g injective. Montrer que
$$\sup_{|z|\le r} |f(z)| \le \sup_{|z|\le r} |g(z)|$$
pour tout $r < 1$.
2. Notons $f(z) = \sum a_n z^n$ le développement de f en série entière. Montrer que
$$|a_n| \le \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} |f((1-1/n)e^{i\theta})| d\theta,$$
pour tout $n \ge 2$.
3. On suppose que f évite $[1, +\infty[$. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de f telle que $|a_n| \le Cn^2$ pour tout $n \ge 2$.

Exercice 3 Soit f holomorphe sur un voisinage du demi-disque $D^+ = D \cap \{z, \mathrm{Re}(z) > 0\}$, ne s'annulant pas sur le bord de D^+. On note $\{a_i\}$ les zéros de f dans D^+, énumérés avec multipilicité. Montrer que
$$\pi \log|f(0)| + 2\pi \sum \log \frac{1}{|a_i|} = \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(e^{i\theta})| d\theta + \int_{-1}^{1} \log(t\mathrm{Re}(\frac{f'}{f})(it))dt.$$

Exercice 4

1. Montrer que si f est une fonction holomorphe bornée non identiquement nulle sur le disque unité, et si $(z_n)_n$ désigne la suite des zéros de f, alors la série
$$\sum_n (1 - |z_n|)$$
converge.
2. On note $U = \{z, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que si f est holomorphe bornée sur U et s'annule en $z_1, z_2, \ldots$ avec $\inf |z_n| > 0$ et $\sum_n \mathrm{Re}(1/z_n) = +\infty$, alors f est nulle.
Ce résultat avait été utilisé dans l'exercice 7 du TD 2.

Exercice 5 (*) Soit f une fonction entière tele que
$$|f(z)| \le \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|},$$
pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que f est nulle.

Exercice 6 (*) Soit $P = a_nX^n + \ldots + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On note $S(P) = |a_0| + \ldots + |a_n|$. Montrer que

$$\log(S(P)) \leq n \log 2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta.$$

En déduire que si $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{C}[X]$ sont des polynômes de degré d_i,

$$\prod_{i=1}^{r} S(P_i) \leq 2^{d_1 + \ldots d_r} S(\prod_{i=1}^{r} P_i).$$